УДК 519.688

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ОПЕРАЦИИ «СЖАТИЕ-РАСТЯЖЕНИЕ», ПРИМЕНЯЕМОЙ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ БИОИНДИКАЦИОННЫХ ДАННЫХ

Ю.В. Волков, В.А. Тартаковский*, В.Н. Попов, И.А. Ботыгин

Томский политехнический университет
E-mail: yvvolkov@tpu.ru
*Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН, г. Томск
E-mail: tv@iom.tomsknet.ru

Рассматривается способ восстановления фазы сигнала, основанный на численном алгоритме, реализующем операцию «сжатие-растяжение», используемый при выделении биоиндикационной информации. Приведены результаты численного исследования предлагаемого алгоритма.

Введение

Биоиндикационное исследование часто основывается на анализе слоистых или кольцевых структур биообъектов [1]. Информация, содержащаяся в картине чередующихся полос разной интенсивности, может быть использована для восстановления связи между биологическим объектом и окружающей средой. Восстановление закодированной подобным образом информации предлагается осуществлять путем вычисления фазы сигнала, представляемого в виде колебательного процесса [2]. В результате реализации данного подхода получают информацию об особенностях изменений локальной структуры индикатора. Точность восстановления информации зависит от уровня и вида составляющих шума, содержащихся в смеси с анализируемым сигналом. Применяя процедуры фильтрации, как во временной, так и в частотной областях добиваются требуемой точности вычисления фазы. В то же время, для сигналов с широким спектром частот ошибка восстановления фазы связана с отсутствием аналитичности. Введение аналитического сигнала (АС), позволяет однозначным образом определить амплитуду, фазу и частоту любой вещественной функции времени [3–6]. Наиболее важное свойство аналитического сигнала – это причинность его спектра. Спектр АС располагается по одну сторону от начала координат оси частот [7], т.е. АС, соответствующий действительной функции, получается путем обнуления одной половины спектра частот. Эта операция непротиворечива только в том случае, когда сигнал сформирован как двухполосный, как сумма сопряженных комплексных функций с непересекающимися спектральными полосами. Эти комплексные функции будут по определению сопряженными аналитическими сигналами. Качественный признак наличия двухполосности – это большое число мало меняющихся периодов у колебания, но при наличии шума трудно сделать вывод о выполнении данного требования.

Решение данной проблемы возможно с использованием операции «сжатия-растяжения» сигнала во

временной области совместно с фильтрацией в частотной области. Преобразование «сжатие», обозначенное символом **C**, сжимает периоды колебания, которые больше некоторого среднего периода, и растягивает те из них, которые меньше, а обратное преобразование – «растяжение» $\mathbf{C}^{-1}$ возвращает сигнал в исходное состояние. Применение операции «сжатие-растяжение» позволяет группировать частотный спектр сигнала вблизи несущей частоты, рис. 1.

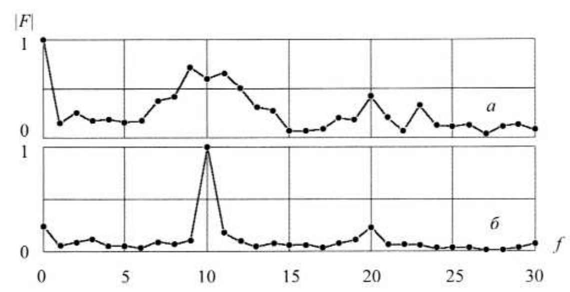


Рис. 1. *Модуль частотного спектра сигнала: а) до, б) после осуществления операции «сжатие-растяжение»*

Численная реализация операции «сжатие-растяжение» основана на алгоритме сплайн-интерполяции с использованием априорной информации о восстанавливаемой фазе. Предположив, что функция фазы φ монотонно возрастающая, получим, что обратная ей функция φ^{-1} будет однозначна, и не будет иметь разрывов, что особенно важно для ее численной реализации.

$$\varphi(x) = f_c z(x), \quad x(z) = \varphi^{-1}(f_c z),$$

где f_c – частота несущая, x, z – шкала отсчетов прямая, обратная.

Введем преобразование «сжатие-растяжение» вдоль оси x следующим образом. Пусть **H** есть оператор последовательного выполнения полосовой фильтрации на несущей частоте f_c и преобразования Гильберта, тогда для сигнала, представленного в виде колебательного процесса $U(x)=[1+\mu(x)]\cos\varphi(x)$, где $1+\mu(x)$ – амплитуда сигнала, алгоритм реализации операции «сжатие-растяжение» совместно с полосовой фильтрацией может быть представлен в следующем виде:

$$C[1+\mu(x)]\cos\varphi(x) = \{1+\mu[\varphi^{-1}(f_c z)]\}\times$$
$$\times\cos\{\varphi[\varphi^{-1}(f_c z)]\} = \cos f_c z + \mu(z)\cos f_c z, \qquad (1)$$

$$\mathbf{H}[\cos f_c z + \mu(z)\cos f_c z] = \sin f_c z, \qquad (2)$$

$$\mathbf{C}^{-1}\sin f_c z = \sin\varphi(x). \qquad (3)$$

Как следует из уравнений (1–3), преобразование «сжатие-растяжение» и полосовая фильтрация позволяют выделить из колебания с монотонной фазой гармоническое колебание с частотой f_c, для которого находится Гильберт-трансформанта, которая затем сжимается и растягивается в обратном порядке.

Возникает вопрос о реализации описанных операций. Для того, чтобы определить $\varphi(x)$, необходимо задать некоторую начальную фазу для осуществления преобразований (1–3). Можно предположить, что величины $\varphi_0(x)$, определяемой в соответствии с выражением (4), будет достаточно для осуществления начального сжатия спектра

$$\varphi_0(x) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{\mathbf{H}U(x)}{U(x)}\right\}. \qquad (4)$$

Затем процесс восстановления фазы реализуется по формуле (5) [2].

$$\varphi_0(x) = \operatorname{arctg}\left\{\left.\frac{\mathbf{H}U[\varphi_n^{-1}(f_c z)]}{U[\varphi_n^{-1}(f_c z)]}\right|_{z=\frac{\varphi_n(x)}{f_c}}\right\}, \qquad (5)$$

где $n=0,1,2,...$

В результате многократного повторения процесса восстановления находят последовательность значений фазы. Эта последовательность будет сходиться к точному решению в том случае, если при неограниченном возрастании числа итераций будет существовать предел этой последовательности. Наличие сходимости определено в ходе отдельного численного эксперимента, по результатам которого при уровне аддитивного шума $\sigma=0,2$ для достижения заданного уровня допустимой погрешности ($\varepsilon=0,0001$) было произведено от 5 до 9 итераций.

Для определения эффективности и целесообразности применения предложенного алгоритма, реализующего операцию «сжатие-растяжение», а также для определения свойств данной операции проведен замкнутый численный эксперимент. В рамках эксперимента было осуществлено численное исследование качества оценок фазы. Результаты работы операции «сжатие-растяжение» получены при разных уровнях и видах вносимого в исходный сигнал шума, а также при исходных сигналах с разной шириной спектра частот.

Описание этапов численного эксперимента

1. Формирование исходного сигнала и сигнала с шумом.

Исходный сигнал задавался в соответствии с математической моделью $U(x)=[1+\mu(x)]\cos\varphi(x)$. В качестве фазы в модельном сигнале использовалась функция следующего вида:

$$\varphi_e(x) = \frac{2\pi T(x-1)}{N} +$$
$$+a\sin\left[\frac{2\pi T(x-1)^2}{N^2}\right] + b\sin\left[\frac{2\pi(x-1)}{N}\right], \qquad (6)$$

где φ_e – начальная фаза, N – количество отсчётов, a, b – постоянные коэффициенты, T – количество периодов колебания, $T=10$.

Шум формировался в частотной области. За центр полосы частот шума была принята несущая частота исходного сигнала f_c. Частотный диапазон шума заполнялся псевдослучайными числами, имеющими равномерное распределение. Сигнал-шум, вводился в исходный сигнал аддитивно или мультипликативно во временной области.

2. Восстановление фазы из смеси сигнала с шумом на основе операции «сжатие-растяжение» и определение ошибки восстановления фазы.

Вычисление фазы осуществлялось в соответствии с выражением:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{V(x)}{U(x)} \pm n\pi,$$

где $V(x)$ – мнимая часть, $V(x)=\mathbf{H}[U(x)]$, $U(x)$ – действительная часть сигнала.

Восстановление функции фазы производилось путем последовательного сшивания элементов дискретной фазы. Оценка нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы вычислялась по формуле:

$$\varepsilon_{\phi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta\varphi_i - \bar{\Delta}\varphi)^2}{\sum_{i=1}^{N}(\varphi^e{}_i - \bar{\varphi}^e)^2}},$$

где $\Delta\varphi$ – разность между исходной и восстановленной фазами, $\bar{\Delta}\varphi$ – среднеарифметическое значение разности фаз, φ^e – разность между исходной фазой и прямой, проведенной через начальное и конечное значение исходной фазы, $\bar{\varphi}^e$ – среднеарифметическое значение разности между исходной фазой и прямой.

Выборочный ансамбль состоял для всех экспериментов из 100 разных реализаций сигналов для каждого уровня шума. Отдельные контрольные эксперименты с большим объемом выборки показали, что среднее и дисперсия, полученных оценок остаются неизменными, что было расценено как наличие статистической устойчивости. При данном объеме выборки в силу центральной предельной теоремы среднее арифметическое значение ошибки $<\varepsilon_\varphi>$ будет распределено по закону, близкому к нормальному. При проведении статистического эксперимента представляют интерес случаи с малым среднеквадратичным отклонением $\sigma_{\varepsilon\varphi}$, что означает устойчивость алгоритма оценивания фазы к входным параметрам, вследствие этого среднее арифметическое значение как оценка ошибки фазы ε_φ будет близко к оценке максимального правдоподобия.

Шум в частотной области занимал полосу от нуля до удвоенного значения несущей частоты исходного сигнала f_c. В качестве начальной информации для осуществления растяжения и сжатия сигнала использовалась исходная фаза. Оценка нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы рассчитывалась при изменении отношения шума к сигналу от 0,1 до 0,7.

Из результатов эксперимента, представленных на рис. 2, видно, что с увеличением уровня шума растет среднее значение нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы и увеличивается ее среднеквадратическое отклонение. Сравнение оценок нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы при мультипликативном (рис. 2, *а*) и аддитивном (рис. 2, *б*) шуме позволяет сделать вывод о том, что наибольшую ошибку в восстановление фазы вносит аддитивный шум. Полученные оценки определяют потенциальную точность операции «сжатие-растяжение».

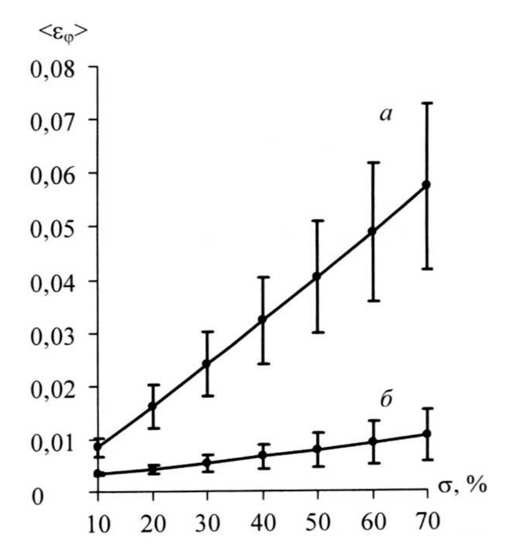


Рис. 2. *Оценки нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы после операции «сжатие-растяжение» с исходной фазой при шуме: а) мультипликативном, б) аддитивном*

При проведении анализа реальных сигналов исходная фаза является неизвестной, поэтому для осуществления операции «сжатие-растяжение» применяют функцию фазы, восстановленную из исследуемого сигнала с шумом.

По результатам эксперимента с использованием в качестве исходной информации для осуществления операции «сжатие-растяжение» восстановленной фазы (рис. 3, *б*, для мультипликативного и на рис. 3, *г*, для аддитивного шума) можно сделать вывод о том, что исходная информация о фазе оказывает существенное влияние на ошибку ее восстановления. Ошибка при сравнении с результатами первого эксперимента (рис. 2) выше в 3...5 раз.

Проведено сравнение полученных оценок нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы после применения операции «сжатие-растяжение», включающей полосовую фильтрацию (рис. 3, *б*, *г*), и после полосовой фильтрации спектра аналогичных сигналов без применения операции «сжатие-растяжение» (рис. 3, *а*, *в*). Данные результаты отражают то, что оценка нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы после применения операции «сжатие-растяжение» с исходной фазой в несколько раз ниже (для мультипликативного шума в 3...7 раз, для аддитивного шума в 2...3 раза) по сравнению с результатами полосовой фильтрации без применения операции «сжатие-растяжение».

В результате замены исходной фазы на восстановленную в операции «сжатие-растяжение» ее эффективность по отношению к полосовой фильт-

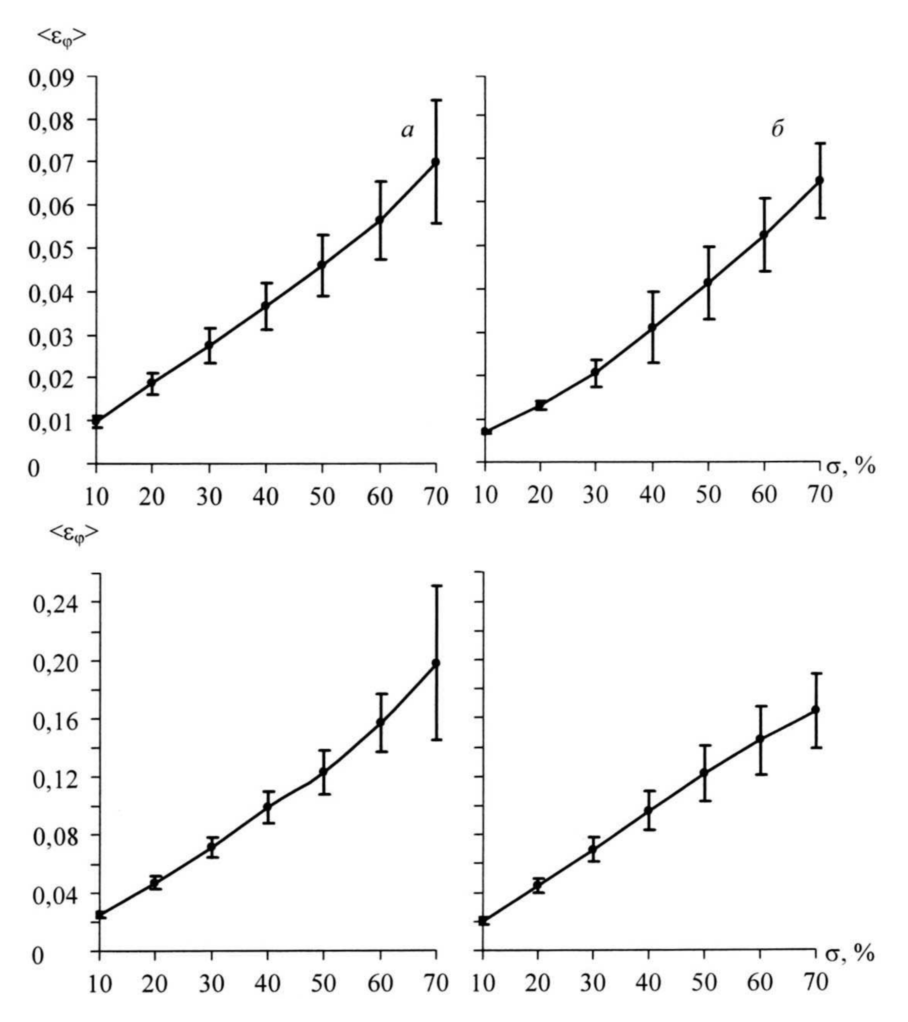


Рис. 3. *Оценки нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы при мультипликативном шуме (а, б) и при аддитивном шуме (в, г) после применения: а, в) полосовой фильтрации; б, г) операции «сжатие-растяжение» с восстановленной фазой*

рации без применения операции «сжатие-растяжение» снижена для мультипликативного шума до 1,5 раз, для аддитивного шума до 1,3 раз. Данное исследование позволяет сделать вывод о том, что ошибка восстановления фазы с применением операции «сжатие-растяжение» будет тем меньше, чем точнее априорная информации об исходной фазе.

Наиболее значимым исследованием является определение влияния величины частотного интервала шума F на работоспособность операции «сжатие-растяжение». Данное исследование проводилось при постоянном уровне шума (σ=0,4). Частотный интервал шума F варьировался от 0 до 80 при собственной частоте исходного сигнала f_c=10. Результаты данного численного эксперимента, рис. 4, показывают, что величина частотного интервала шума не оказывает влияния на изменение ошибки при использовании операции «сжатие-растяжение» в отличие от полосовой фильтрации без применения операции «сжатие-растяжение», при которой оценка нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы растет с увеличением частотного интервала аддитивного шума.

Вторым значимым исследованием является применение операции «сжатие-растяжение» для сигналов с «широким» частотным спектром, т.к. они наиболее соответствуют реальным сигналам, получаемым при анализе биоиндикационных картин [3]. Эксперимент проводился для аддитивного шума постоянного уровня (σ=0,4). Варьируемым параметром в данном эксперименте являлся интервал частотного спектра исходного сигнала (рассматривались сигналы, для которых F=6, 8, 10, 12 при f_c=10).

Из результатов проведенного эксперимента (рис. 5) следует, что изменение интервала частотного спектра исходного сигнала не оказывает влияния на изменение оценки нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы при использовании операции «сжатие-растяжение» до тех пор, пока выполняется условие $F \leq f_c$, а при полосовой фильтрации без применения операции «сжатие-растяжение» наблюдается постоянное ее увеличение при расширении спектра частот сигнала.

В результате замкнутого численного эксперимента показано, что при использовании алгоритма,

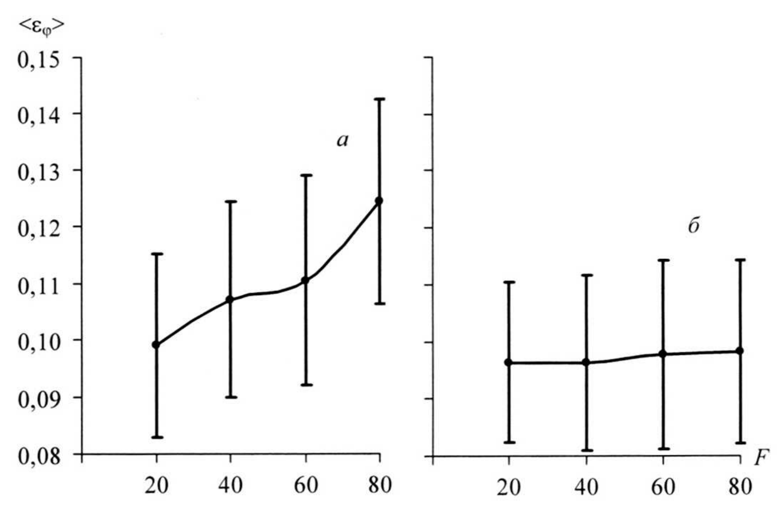


Рис. 4. *Оценки нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы при изменении диапазона аддитивного шума после применения: а) полосовой фильтрации; б) операции «сжатие-растяжение» с восстановленной фазой*

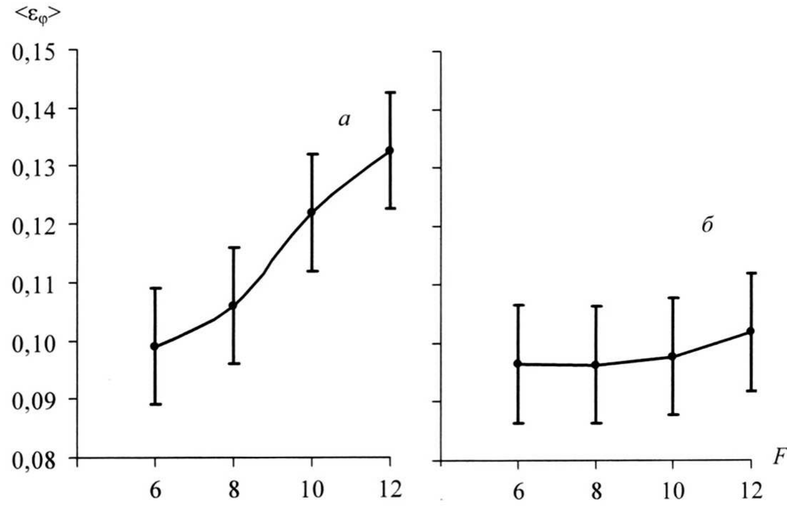


Рис. 5. *Оценки нормированной среднеквадратической ошибки восстановления фазы для сигналов с разной шириной спектра частот при аддитивном шуме после применения: а) полосовой фильтрации; б) операции «сжатие-растяжение» с восстановленной фазой*

реализующего операцию «сжатие-растяжение» совместно с полосовой фильтрацией:

1. Ошибка восстановления фазы сигнала ниже при мультипликативном шуме в 1,5 раза, при аддитивном шуме в 1,3 раз по отношению к ошибке восстановления фазы сигнала при использовании полосовой фильтрации без применения операции «сжатие-растяжение».
2. Величина частотного интервала исходного сигнала не влияет на точность восстановления фазы при выполнении условия $F \leq f_c$.
3. Точность восстановления фазы не зависит от величины частотного интервала шума.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект «Обь» № 05-07-98009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ваганов Е.А., Шашкин А.В. Рост и структура годичных колец хвойных. – Новосибирск: Наука, СИФ РАН, 2000. – 232 с.
2. Тартаковский В.А., Волков Ю.В., Исаев Ю.Н., Несветайло В.Д., Попов В.Н. Математическая модель радиального сечения годичных колец деревьев // Автометрия. – 2003. – № 5. – С. 118–127.
3. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. – М.: Мир, 1976. – 208 с.
4. Doroslovacki M.I. On nontrivial analytic signals with positive instantaneous frequency // Signal Processing. – 2003. – № 83. – P. 655–658.
5. Vakman D. On the analytic signal, the Teager Kaiser energy algorithm, and other methods for defining amplitude and frequency // IEEE Trans. Signal processing. – 1996. – № 4. – P. 791–815.
6. Cohen L., Loughlin P., Vakman D. On an ambiguity in the definition of the amplitude and phase of a signal // Signal Processing. – 1999. – № 79. – P. 301–312.
7. Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. – М.: Мир, 1976. – 208 с.